Exercice 1 :

On introduit R_i "le i-ème tirage est une boule rouge"
Sachant que X est la variable aléatoire donnant le numéro du tirage amenant la première boule rouge, on en déduit que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

Alors, on peut calculer la loi de X.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \overline{R_3} \ldots \cap \overline{R_{k-1}} \cap R_k)$
Sachant que les évènements $R_1, \ldots R_k$ sont dépendants, on utilise la formule des probabilités composées :

$$P(X=k) = P(\overline{R_1}) \times P_{\overline{R_1}}(\overline{R_2}) \times P_{\overline{R_1} \cap \overline{R_2}}(\overline{R_3}) \times \ldots \times P_{\overline{R_1} \ldots \cap \overline{R_{k-2}}}(\overline{R_{k-1}}) \times P_{\overline{R_1} \cap \ldots \cap \overline{R_{k-1}}}(R_k)$$

$$P(X=k) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{k-1}{k} \times \frac{1}{k+1}$$

$$\boxed{P(X=k) = \frac{1}{k(k+1)}}$$

Exercice 2 :

On étudie la série $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ en passant par les sommes partielles.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\times\frac{k-1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\times\left(\frac{k}{k!}-\frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k\times\left(\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{(k-1)!} - \frac{k}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{k!} + \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

Or on sait que les séries $\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}$ sont des séries exponentielles convergentes.

Donc $\sum_{k\geq 1} kP(X=k)$ est absolument convergente, ce qui veut dire que $E(X)$ existe et

$\underline{E(X)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\times\frac{k-1}{k!} = 2e - e = \boxed{e}$

Exercice 3 :

On sait d'après la formule de König-Huygens que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$

Il faut alors calculer $E(X^2)$: de fait, on étudie la série $\sum_{k \geq 1} k^2 P(X=k)$ en passant par les sommes partielles.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \times P(X=k) = \sum_{k=1}^{m} k^2 \times \frac{k-1}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k!} \times (k-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{k^3}{k!} - \frac{k^2}{k!}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{(k-1)!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(k+1)^2}{k!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k^2+2k+1}{k!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k^2}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{2k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$$

$$= 2\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{(k-1)!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$$

$$= 2\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$$

$$= 3\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}$$

Or on sait que la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$ est une série exponentielle convergente.

Donc $\sum_{k \geqslant 1} k^2 P(X=k)$ est absolument convergente, ce qui veut dire que $E(X^2)$ existe telle que :

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2 \times \frac{k-1}{k!} = 3e$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens :

$$\begin{aligned} \underline{V(X)} &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= 3e - e^2 \\ &= \boxed{e(3-e)} \end{aligned}$$

qui veut dire que $E(X)$ existe et
$\underline{E(X)} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \times \frac{k-1}{k!} = 2e - e = \boxed{e}$

Exercice 4:

1. On répète 10 fois la même expérience aléatoire. Tous les tirages sont identiques, indépendants. Chaque expérience possède exactement deux issues: S: "piocher une boule noire" et $\overline{S}$: "piocher une boule rouge". De plus $P(S) = \frac{1}{10}$.
Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$, notée $\boxed{\mathcal{B}(10 ; \frac{1}{10})}$

X étant la variable aléatoire donnant le nombre de tirages ayant amené la boule noire, on en déduit que $\boxed{X(\Omega) = [\![0 ; 10]\!]}$

Comme X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{10}$, on a :
$\boxed{P(X = k) = \binom{10}{k} \times \left(\frac{1}{10}\right)^k \times \left(\frac{9}{10}\right)^{10-k}}$ $\quad \forall k \in X(\Omega)$

2. X étant une loi binomiale, on en déduit:

$\underline{E(X)} = n \times p = 10 \times \frac{1}{10} = \boxed{1}$

$\underline{V(X)} = n \times p \times (1 - p) = 10 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \boxed{\frac{9}{10}}$

3. On calcule la probabilité d'obtenir au moins deux fois la boule noire lors des 10 tirages :

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$
$$= \boxed{1 - (P(X=1) + P(X=0))}$$

Exercice 5 :

Soit R : "obtenir une boule rouge"

L'urne dans laquelle sont effectués les tirages est choisie au hasard, donc les évènements $U_1, \dots U_n$ sont équiprobables, alors $\forall k \in [\![1; n]\!]$, $P(U_k) = \frac{1}{n}$.

La famille (U_k) est un système complet d'évènements.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(R) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k) \times P_{U_k}(R)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{k}{n+1}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} \times \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. On calcule grâce à la formule de Bayes :

$$P_R(U_k) = \frac{P(U_k)}{P(R)} \times P_{U_k}(R)$$
$$= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2}} \times \frac{k}{n+1} = \boxed{\frac{2k}{n(n+1)}}$$